

全国大学生数学建模竞赛 竞赛题目汇编(1992-2000)

[注]相关优秀论文已经汇编成册正式出版：全国大学生数学建模竞赛组委会编，《全国大学生数学建模竞赛优秀论文汇编（1992-2000）》，北京：中国物价出版社，2002年3月出版。

1992 年赛题

A 题 施肥效果分析

某地区作物生长所需的营养素主要是氮(N)、钾(K)、磷(P)。某作物研究所在该地区对土豆与生菜做了一定数量的实验，实验数据如下列表格所示，其中 ha 表示公顷，t 表示吨，kg 表示公斤。当一个营养素的施肥量变化时，总将另二个营养素的施肥量保持在第七个水平上，如对土豆产量关于 N 的施肥量做实验时，P 与 K 的施肥量分别取为 196kg/ha 与 372kg/ha。

试分析施肥量与产量之间关系，并对所得结果从应用价值与如何改进等方面作出估价。

土豆：

N		P		K	
施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)	施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)	施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	15.18	0	33.46	0	18.98
34	21.36	24	32.47	47	27.35
67	25.72	49	36.06	93	34.86
101	32.29	73	37.96	140	38.52
135	34.03	98	41.04	186	38.44
202	39.45	147	40.09	279	37.73
259	43.15	196	41.26	372	38.43
336	43.46	245	42.17	465	43.87
404	40.83	294	40.36	558	42.77
471	30.75	342	42.73	651	46.22

生菜：

N		P		K	
施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)	施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)	施肥量 (kg/ha)	产量 (t/ha)
0	11.02	0	6.39	0	15.75
28	12.70	49	9.48	47	16.76
56	14.56	98	12.46	93	16.89
84	16.27	147	14.38	140	16.24
112	17.75	196	17.10	186	17.56
168	22.59	294	21.94	279	19.20
224	21.63	391	22.64	372	17.97
280	19.34	489	21.34	465	15.84
336	16.12	587	22.07	558	20.11
392	14.11	685	24.53	651	19.40

（北京理工大学叶其孝提供）

B 题 实验数据分解

组成生命蛋白质的若干种氨基酸可以形成不同的组合。通过质谱实验测定分子量来分析某个生命蛋白质分子的组成时，遇到的首要问题就是如何将它的分子量 X 分解为几个氨基酸的已知分子量 $a[i]$ ($i=1,2,\dots,n$)之和。某实验室所研究的问题中：

$$n = 18,$$

$$a [1: 18] = 57,71,87,97,99,101,103,113, 114,115,128,129,131,137,147,156,163,186.$$

x 为正整数 ≤ 1000 。

要求针对该实验室拥有或不拥有微型计算机的情况，对上述问题提出你们的解答，并就你所研讨的数学模型与方法在一般情形下进行讨论。

（华东理工大学俞文 ci、复旦大学谭永基提供）

注 1992 年优秀论文及评阅人文章没有正式发表。

全国大学生数学建模竞赛

1993 年赛题

A 题 非线性交调的频率设计

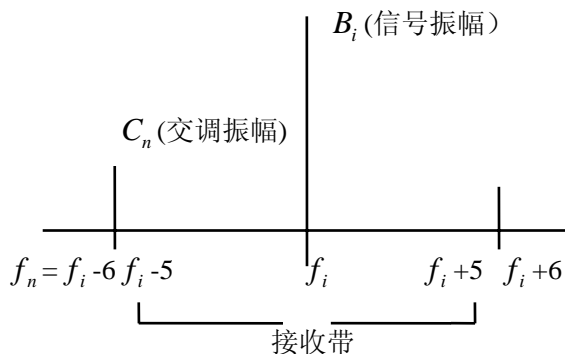
如果一非线性器件的输入 $u(t)$ 与输出 $y(t)$ 的关系是 $y(t) = u(t) + u^2(t)$ (其中 t 是时间), 那么当输入是包含频率 f_1 、 f_2 的信号 $u(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$ 时, 输出 $y(t)$ 中将不仅包含输入信号 f_1 、 f_2 , 而且还会出现 $2f_1$ 、 $f_1 \pm f_2$ 等新的频率成分, 这些新的频率称为交调。如果交调出现在原有频率 f_1 、 f_2 的附近, 就会形成噪声干扰, 因此工程设计中对交调的出现有一定的要求。

现有一 SCS (非线性) 系统, 其输入输出关系由如下一组数据给出:

输入 u	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 y	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号为 $u(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t + A_3 \cos 2\pi f_3 t$, 其中 $A_1 = 25$, $A_2 = 10$, $A_3 = 45$ 是输入信号的振幅。对输入信号频率 f_1 、 f_2 、 f_3 的设计要求为:

- 1) $36 \leq f_1 \leq 40, 41 \leq f_2 \leq 50, 46 \leq f_3 \leq 55$ 。
- 2) 输出中的交调均不得出现在 $f_i \pm 5$ 的范围内 ($i=1,2,3$), 此范围称为 f_i 的接收带 (参看下图)。
- 3) 定义输出中的信噪比 $SNR = 10 \log_{10} \frac{B_i^2}{C_n^2}$ (单位: 分贝), 其中 B_i 是输出中对应于频率为 f_i 的信号的振幅, C_n 是某一频率为 f_n 的交调的振幅。若 f_n 出现在 $f_n = f_i \pm 6$ 处 ($i = 1,2,3$), 则对应的 SNR 应大于 10 分贝 (参看下图)。



- 4) f_i 不得出现在 f_j 的接收带内 ($i, j = 1,2,3, i \neq j$)。
 - 5) 为简单起见, f_i 只取整数值, 且交调只需考虑二阶类型 (即 $\{f_i \pm f_j\}, i, j = 1,2,3$) 和三阶类型 (即 $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}, i, j, k = 1,2,3$)。
- 试按上述要求设计输入信号频率 f_1 、 f_2 、 f_3 。

(北京大学谢衷洁提供)

B 题 足球队排名次

下表给出了我国 12 支足球队在 1988 ~ 1989 年足球甲级队联赛中的成绩, 要求

- 1) 设计一个依据这些成绩排出诸队名次的算法, 并给出用该算法排名次的结果。
- 2) 把算法推广到任意 N 个队的情况。
- 3) 讨论: 数据应具备什么样的条件, 用你的方法才能够排出诸队的名次。

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₁₂
T ₁	X	0:1 1:0 0:0	2:2 1:0 0:2	2:0 3:1 1:0	3:1	1:0	0:1 1:3	0:2 2:1	1:0 4:0	1:1 1:1	X	X
T ₂		X	2:0 0:1 1:3	0:0 2:0 0:0	1:1	2:1	1:1 1:1	0:0 0:0	2:0 1:1	0:2 0:0	X	X
T ₃			X	4:2 1:1 0:0	2:1	3:0	1:0 1:4	0:1 3:1	1:0 2:3	0:1 2:0	X	X
T ₄				X	2:3	0:1	0:5 2:3	2:1 1:3	0:1 0:0	0:1 1:1	X	X
T ₅					X	0:1	X	X	X	X	1:0 1:2	0:0 1:1
T ₆						X	X	X	X	X	X	X
T ₇							X	1:0 2:0 0:0	2:1 3:0 1:0	3:1 3:0 2:2	3:1	2:0
T ₈								X	0:1 1:2 2:0	1:1 1:0 0:1	3:1	0:0
T ₉									X	3:0 1:0 0:0	1:0	1:0
T ₁₀										X	1:0	2:0
T ₁₁											X	1:1 1:2 1:1
T ₁₂												X

- 说明： 1) 12 支球队依次记作 T₁, T₂, …, T₁₂。
 2) 符号 X 表示两队未曾比赛。
 3) 数字表示两队比赛结果，如 T₃ 行与 T₈ 列交叉处的数字表示：T₃ 与 T₈ 比赛了 2 场；T₃ 与 T₈ 的进球数之比为 0:1 和 3:1。

(清华大学蔡大用提供)

注 1993 年北京地区的优秀论文及评阅人文章发表在《数学的实践与认识》1994 年第 2 期上。

全国大学生数学建模竞赛

1994 年赛题

A 题 逢山开路

要在一山区修建公路，首先测得一地点的高程，数据见表 1（平面区域 $0 \leq x \leq 5600, 0 \leq y \leq 4800$ ，表中数据为坐标点的高程，单位：米）。数据显示：在 $y = 3200$ 处有一东西走向的山峰；从坐标 $(2400, 2400)$ 到 $(4800, 0)$ 有一西北—东南走向的山谷；在 $(2000, 2800)$ 附近有一山口湖，其最高水位略高于 1350 米，雨季在山谷中形成一溪流。经调查知，雨量最大时溪流水面宽度 W 与（溪流最深处的） x 坐标的关系可近似表示为 $w(x) = \left(\frac{x-2400}{2}\right)^{3/4} + 5$ ($2400 \leq x \leq 4000$)。

公路从山脚 $(0, 800)$ 处开始，经居民点 $(4000, 2000)$ 至矿区 $(2000, 4000)$ 。已知路段工程成本及对路段坡度 α （升高程与水平距离之比）的限制如表 2。

1) 试给出一种线路设计方案，包括原理、方法及比较精确的线路位置（含桥梁、隧道），并估算该方案的总成本。

2) 如果居民点改为 $3600 \leq x \leq 4000, 2000 \leq y \leq 2400$ 的居民区，公路只须经过居民区即可，那么你的方案有什么改变。

	↑ 北														
4800	1350	1370	1390	1400	1410	960	940	880	800	690	570	430	290	210	150
4400	1370	1390	1410	1430	1440	1140	1110	1050	950	820	690	540	380	300	210
4000	1380	1410	1430	1450	1470	1320	1280	1200	1080	940	780	620	460	370	350
3600	1420	1430	1450	1480	1500	1550	1510	1430	1300	1200	980	850	750	550	500
3200	1430	1450	1460	1500	1550	1600	1550	1600	1600	1600	1550	1500	1500	1550	1550
2800	950	1190	1370	1500	1200	1100	1550	1600	1550	1380	1070	900	1050	1150	1200
2400	910	1090	1270	1500	1200	1100	1350	1450	1200	1150	1010	880	1000	1050	1100
2000	880	1060	1230	1390	1500	1500	1400	900	1100	1060	950	870	900	930	950
1600	830	980	1180	1320	1450	1420	1400	1300	700	900	850	840	380	780	750
1200	740	880	1080	1130	1250	1280	1230	1040	900	500	700	780	750	650	550
800	650	760	880	970	1020	1050	1020	830	800	700	300	500	550	480	350
400	510	620	730	800	850	870	850	780	720	650	500	200	300	350	320
0	370	470	550	600	670	690	670	620	580	450	400	300	100	150	250
Y/X	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800	5200	5600

工程种类	一般路段	桥梁	隧道
工程成本（元/米）	300	2000	1500（长度 ≤ 300 米）；3000（长度 > 300 米）
对坡度 α 的限制	$\alpha < 0.125$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0.100$

（西安电子科技大学何大可提供）

B 题 锁具装箱

某厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有 5 个槽，每个槽的高度从 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 6 个数（单位略）中任取一数。由于工艺及其它原因，制造锁具时对 5 个槽的高度还有两个限制：至少有 3 个不同的数；相邻两槽的高度之差不能为 5。满足以上条件制造出来的所有互不相同的锁具称为一批。

从顾客的利益出发，自然希望在每批锁具中“一把钥匙开一把锁”。但是在当前工艺条件下，对于同一批中两个锁是否能够互开，有以下试验结果：若二者相对应的 5 个槽的高度中有 4 个相同，另一个槽的高度差为 1，则可能互开；在其它情形下，不可能互开。

原来，销售部门在一批锁具中随意的取 60 个装一箱出售。团体顾客往往购买几箱到几十箱，他们抱怨购得的锁具会出现互开的情形。现聘你为顾问，回答并解决以下的问题：

1) 每一批锁具有多少个，装多少箱。

- 2) 为销售部门提出一种方案, 包括如何装箱 (仍是 60 个锁具一箱), 如何给箱子以标志, 出售时如何利用这些标志, 使团体顾客不再或减少抱怨。
- 3) 采取你提出的方案, 团体顾客的购买量不超过多少箱, 就可以保证一定不会出现互开的情形。
- 4) 按照原来的装箱办法, 如何定量地衡量团体顾客抱怨互开的程度 (试对购买一、二箱者给出具体结果)。

(华东理工大学俞文 ci、复旦大学谭永基提供)

注 优秀论文及评阅人文章可参见《全国大学生数学建模竞赛优秀论文汇编(1992-2000)》一书 (全国大学生数学建模竞赛组委会编, 中国物价出版社 2002 年 3 月出版)。

全国大学生数学建模竞赛

1995 年赛题

A 题 一个飞行管理问题

在约 10000 米高空的某边长为 160 公里的正方形区域内，经常有若干架飞机作水平飞行。区域内每架飞机的位置和速度向量均由计算机记录其数据，以便进行飞行管理。当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘时，记录其数据后，要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞。如果会碰撞，则应计算如何调整各架（包括新进入的）飞机飞行的方向角，以避免碰撞。现假定条件如下：

- 1) 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于 8 公里；
- 2) 飞机飞行方向角调整的幅度不应超过 30 度；
- 3) 所有飞机飞行速度均为每小时 800 公里；
- 4) 进入该区域的飞机在到达该区域边缘时，与区域内飞机的距离应在 60 公里以上；
- 5) 最多需考虑 6 架飞机；
- 6) 不必考虑飞机离开此区域后的状况；

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型，列出计算步骤，对以下数据进行计算（方向角误差不超过 0.01 度），要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小。

设该区域 4 个顶点的坐标为：(0, 0), (160, 0), (160, 160), (0, 160)。

记录数据为：

飞机编号	横坐标 X	纵坐标 Y	方向角 (度)
1	150	140	243
2	85	85	236
3	150	155	220.5
4	145	50	159
5	130	150	230
新进入	0	0	52

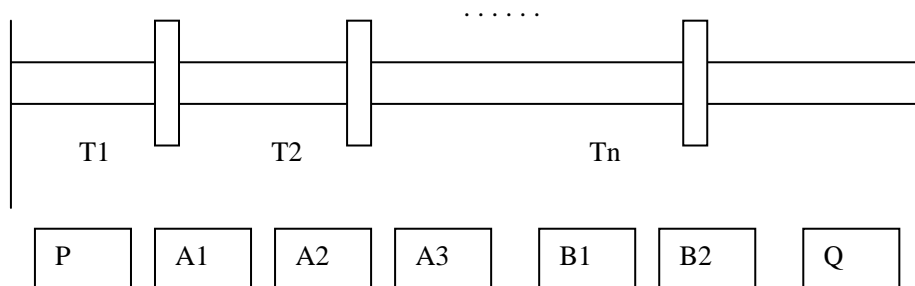
注：方向角指飞行方向与 X 轴正向的夹角。

试根据实际应用背景对你的模型进行评价和推广。

（华东理工大学俞文 ci、复旦大学谭永基提供）

B 题 天车与冶炼炉的作业调度

某钢铁厂冶炼车间的厂房布局是，地面沿一直线依次安置 7 个工作点：辅料供应处 P；A 组 3 座转炉（冶炼成品钢）A1, A2, A3；B 组 2 座冶炼炉（冶炼半成品钢，简称半钢）B1, B2；原料供应处 Q。这些设备的上方贯通着一条运送物料的天车轨道，上面布置着若干天车 T1, T2, …, Tn 为炉子作业服务。布局示意图如下。



天车与冶炼炉的作业过程与工序为：天车从 Q 处吊起原料有罐（吊罐时间 t_y ）运至 B1 或 B2 处放下（放罐时间 t_i ），并将上一炉的原料空罐吊起（吊空罐时间 t_o ）返回 Q 处放下（放空罐时间 t_k ）。B 组炉在原料罐放下后即可在辅助作业下开始冶炼（冶炼时间 t_b ），冶炼后将半钢倒入空半钢罐（时间记入 t_b ），由天车吊起半钢罐（吊罐时间 t_d ）运至 A1 或 A2、A3 处将半钢倒入转炉（倒入时间 t_e ），并将空罐返回 B1 或 B2 处放下（放空罐时间 t_c ）。再由天车从 P 处吊起辅料一槽（吊槽时间 t_g ）运至 A1 或 A2、A3 处加入转炉（加入时间 t_f ），并将空槽返回 P 处放下（放空槽时间 t_h ）。A 组炉在半钢和辅料加入后即可开始冶炼（冶炼时间 t_a ），冶炼后成品钢的输出不用天车（输出时间记入 t_a ）。天车通过相邻两个工作点的运行时间都相同，记为 t_x 。

由于各台天车在同一条轨道上运行，因此其顺序位置 T_1, T_2, \dots, T_n 不可交换。在同一时间同一炉子上只能允许一台天车作业；但 P、Q 两处可以允许多台天车同时作业。在 P, A1, \dots , Q 每两个相邻工作点之间最多只能容纳 2 台同时停放。

天车与冶炼炉作业调度的要求为：（1）成品钢厂量尽量高；（2）各台天车的作业率（天车作业时间所占比例）尽量均衡（考虑到设备及人员安全等因素，一般天车率不超过 70%）；（3）绝不允许出现天车相撞等事故；（4）调度规则尽量简明，以便于现场人员使用。

现设定： $t_a=48, t_b=27, t_i=3, t_o=2, t_c=2, t_d=3, t_e=5, t_f=2, t_g=2, t_h=1, t_y=3, t_k=2$ （单位：分钟）， $t_x=15$ 秒；A 组炉平均每天每炉产量 $W_e=120$ 吨。在不超过 5 台天车的条件下，设计一种满足上述要求的天车与冶炼炉的作业调度方案：

- （1） 个台天车负责哪些作业（列出〈〈工序清单〉〉）；
- （2） 在所给方案的一个运行周期内，每一时刻天车和冶炼炉处于什么状态（画出〈〈天车—炉子作业运行图〉〉）；
- （3） 一份供现场人员使用的〈〈调度规则说明书〉〉；
- （4） 在所给方案下计算个台天车的作业率。

并按每天冶炼炉估计该车间成品钢的年产量（扣除设备维修日，每台转炉作业日每年 300 天计算）。实际生产过程中， t_a, t_b, \dots, t_k 都是随机的（上面设定的数值可视为平均值），讨论你的调度方案如何适用于实际生产过程。试提出该车间提高钢产量到年产 300 万吨以上的建议。

（浙江大学刘祥官、李吉鸾提供）

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》1996 年第 1 期上。

全国大学生数学建模竞赛

1996 年赛题

A 题 最优捕鱼策略

为了保护人类赖以生存的自然环境, 可再生资源(如渔业. 林业资源)的开发必须适度. 一种合理\简化的策略是, 在实现可持续收获的前提下, 追求最大的产量或最佳效益.

考虑对某种鱼(鱼)的最优捕捞策略:

假设这种鱼分 4 个年龄组, 称 1 龄鱼, ..., 4 龄鱼. 各年龄组每条鱼的平均重量分别为 5.07, 11.55, 17.86, 22.99(克), 各年龄组鱼的自然死亡率为 0.8(1/年), 这种鱼为季节性集中产卵繁殖, 平均每条 4 龄鱼的产卵量为 1.109×10^5 (个), 3 龄鱼的产卵量为这个数的一半, 2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵, 产卵和孵化期为每年的最后 4 个月, 卵孵化并成活为 1 龄鱼, 成活率(1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比)为 $\frac{1.22 \times 10^{11}}{(1.22 \times 10^{11} + n)}$.

渔业管理部门规定, 每年只允许在产卵孵化期前的 8 个月内进行捕捞作业. 如果每年投入的捕捞能力(如渔船数\下网次数等)固定不变, 这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比, 比例系数不妨称捕捞强度系数. 通常使用 13mm 网眼的拉网, 这种网只能捕捞 3 龄鱼和 4 龄鱼, 其两个捕捞强度系数之比为 0.42:1. 渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

1) 建立数学模型分析如何实现可持续捕获(即每年开始捕捞时渔场中个年龄组鱼群条数不变), 并且在此前提条件下得到最高的年收获量(捕捞总重量).

2) 某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年, 合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受到太大破坏. 已知承包时个年龄组鱼群的数量分别为: 122, 29.7, 10.1, 3.29(*109 条), 如果仍用固定努力量的捕捞方式, 该公司应采取怎样的策略才能使总收获量最高.

(北京师范大学 刘来福提供)

B 题 节水洗衣机

我国淡水资源有限, 节约用水人人有责. 洗衣机在家庭中占有相当大的份额, 目前洗衣机已非常普及, 节约洗衣机用水十分重要. 假设在放入衣物和洗涤剂后洗衣机的运行过程为: 加水—漂洗—脱水—加水—漂洗—脱水—...—加水—漂洗—脱水(称“加水—漂洗—脱水”为运行一轮). 请为洗衣机设计一种程序(包括运行多少轮\每轮加入水量等), 使得在满足一定洗涤效果的前提下, 总量最少. 选用合理的数据进行计算. 对照目前常用的洗衣机的运行情况, 对你的模型和结果作出评价.

(重庆大学 傅鹏提供)

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》1997 年第 1 期上。

全国大学生数学建模竞赛

1997 年赛题

A 题 零件的参数设计

一件产品由若干零件组装而成，标志产品性能的某个参数取决于这些零件的参数。零件参数包括标定值和容差两部分。进行成批生产时，标定值表示一批零件该参数的平均值，容差则给出了参数偏离其标定值的容许范围。若将零件参数视为随机变量，则标定值代表期望值，在生产部门无特殊要求时，容差通常规定为均方差的 3 倍。

进行零件参数设计，就是要确定其标定值和容差。这时要考虑两方面因素：一是当各零件组装成产品时，如果产品参数偏离预先设定的目标值，就会造成质量损失，偏离越大，损失越大；二是零件容差的大小决定了其制造成本，容差设计得越小，成本越高。

试通过如下的具体问题给出一般的零件参数设计方法。

粒子分离器某参数（记作 y ）由 7 个零件的参数（记作 x_1, x_2, \dots, x_7 ）决定，经验公式为：

$$y = 174.42 \times \left(\frac{x_1}{x_5}\right) \times \left[\frac{x_3}{x_2 - x_1}\right]^{0.85} \times \sqrt{\frac{1 - 2.62 \times \left[1 - 0.36 \times \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}\right]^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1.16}}{x_6 \times x_7}}$$

y 的目标值（记作 y_0 为 1.50。当 y 偏离 $y_0 \pm 0.1$ 时，产品为次品，质量损失为 1,000（元）；当 y 偏离 $y_0 \pm 0.3$ 时，产品为废品，损失为 9,000（元）。

零件参数的标定值有一定的容许变化范围；容差分为 A、B、C 三个等级，用与标定值的相对值表示，A 等为 $\pm 1\%$ ，B 等为 $\pm 5\%$ ，C 等为 $\pm 10\%$ 。7 个零件参数标定值的容许范围，及不同容差等级零件的成本（元）如下表（符号/表示无此等级零件）：

	标定值容许范围	C 等	B 等	A 等
X_1	[0.075, 0.125]	/	25	/
X_2	[0.225, 0.375]	20	50	/
X_3	[0.075, 0.125]	20	50	200
X_4	[0.075, 0/125]	50	100	500
X_5	[1.125, 1.875]	50	/	/
X_6	[12, 20]	10	25	100
X_7	[0.5625, 0.935]	/	25	100

现进行成批生产，每批产量 1,000 个。在原设计中，7 个零件参数的标定值为： $X_1=0.1, X_2=0.3, X_3=0.1, X_4=0.1, X_5=1.5, X_6=16, X_7=0.75$ ；容差均取最便宜的等级。

请你综合考虑 y 偏离 y_0 造成的损失和零件成本，重新设计零件参数（包括标定值和容许差），并与原设计比较，总费用降低了多少。

（美国明尼苏达大学李文连、清华大学姜启源提供）

B 题 截断切割

某些工业部门（如贵重石材加工等）采用截断切割的加工方式。这里“截断切割”是指将物体沿某个切割平面分成两部分。从一个长方体中加工出一个已知尺寸、位置预定的长方体（这两个长方体的对应表面是平行的），通常要经过 6 次截断切割。

设水平切割单位面积的费用是垂直切割单位面积费用的 r 倍，且当先后两次垂直切割的平面（不管它们之间是否穿插水平切割）不平行时，因调整刀具需额外费用 e 。

试为这些部门设计一种安排各面加工次序（称“切割方式”）的方法，使加工费用最少。（由工艺要求，与水平工作台接触的长方体底面是事先指定的） 详细要求如下：

- 1) 需考虑的不同切割方式的总数。
- 2) 给出上述问题的数学模型和求解方法。
- 3) 试对某部门用的如下准则作出评价：每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割。
- 4) 对于 $e = 0$ 的情形有无简明的优化准则。
- 5) 用以下实例验证你的方法：待加工长方体和成品长方体的长、宽、高分别为 10、14.5、19 和 3、2、4，二者左侧面、正面、底面之间的距离分别为 6、7、9（单位均为厘米）。垂直切割费用为每平方米 1 元， r 和 e 的数据有以下 4 组：

- a. $r = 1, e = 0$; b. $r = 1.5, e = 0$;
- c. $r = 8, e = 0$; d. $r = 1.5; 2 \leq e \leq 15$.

对最后一组数据应给出所有最优解，并进行讨论。

（华东理工大学俞文?、复旦大学谭永基提供）

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》1998 年第 1 期上。

全国大学生数学建模竞赛

1998 年赛题

A 题 投资的收益和风险

市场上有 n 种资产（如股票、债券、…） $S_i (i=1, \dots, n)$ 供投资者选择，某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估，估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i ，并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i 。考虑到投资越分散，总的风险越小，公司确定，当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量。

购买 S_i 要付交易费，费率为 p_i ，并且当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算（不买当然无须付费）。另外，假定同期银行存款利率是 r_0 ，且既无交易费又无风险。（ $r_0=5\%$ ）

1) 已知 $n=4$ 时的相关数据如下：

S_i	r_i (%)	q_i (%)	p_i (%)	u_i (元)
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定的资金 M ，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，而总体风险尽可能小。

2) 试就一般情况对以上问题进行讨论，并利用以下数据进行计算。

S_i	r_i (%)	q_i (%)	p_i (%)	u_i (元)
S_1	9.6	42	2.1	181
S_2	18.5	54	3.2	407
S_3	49.4	60	6.0	428
S_4	23.9	42	1.5	549
S_5	8.1	1.2	7.6	270
S_6	14	39	3.4	397
S_7	40.7	68	5.6	178
S_8	31.2	33.4	3.1	220
S_9	33.6	53.3	2.7	475
S_{10}	36.8	40	2.9	248
S_{11}	11.8	31	5.1	195
S_{12}	9	5.5	5.7	320
S_{13}	35	46	2.7	267
S_{14}	9.4	5.3	4.5	328
S_{15}	15	23	7.6	131

（浙江大学陈叔平提供）

B 题 灾情巡视路线

下图为某县的乡（镇）、村公路网示意图，公路边的数字为该路段的公里数。

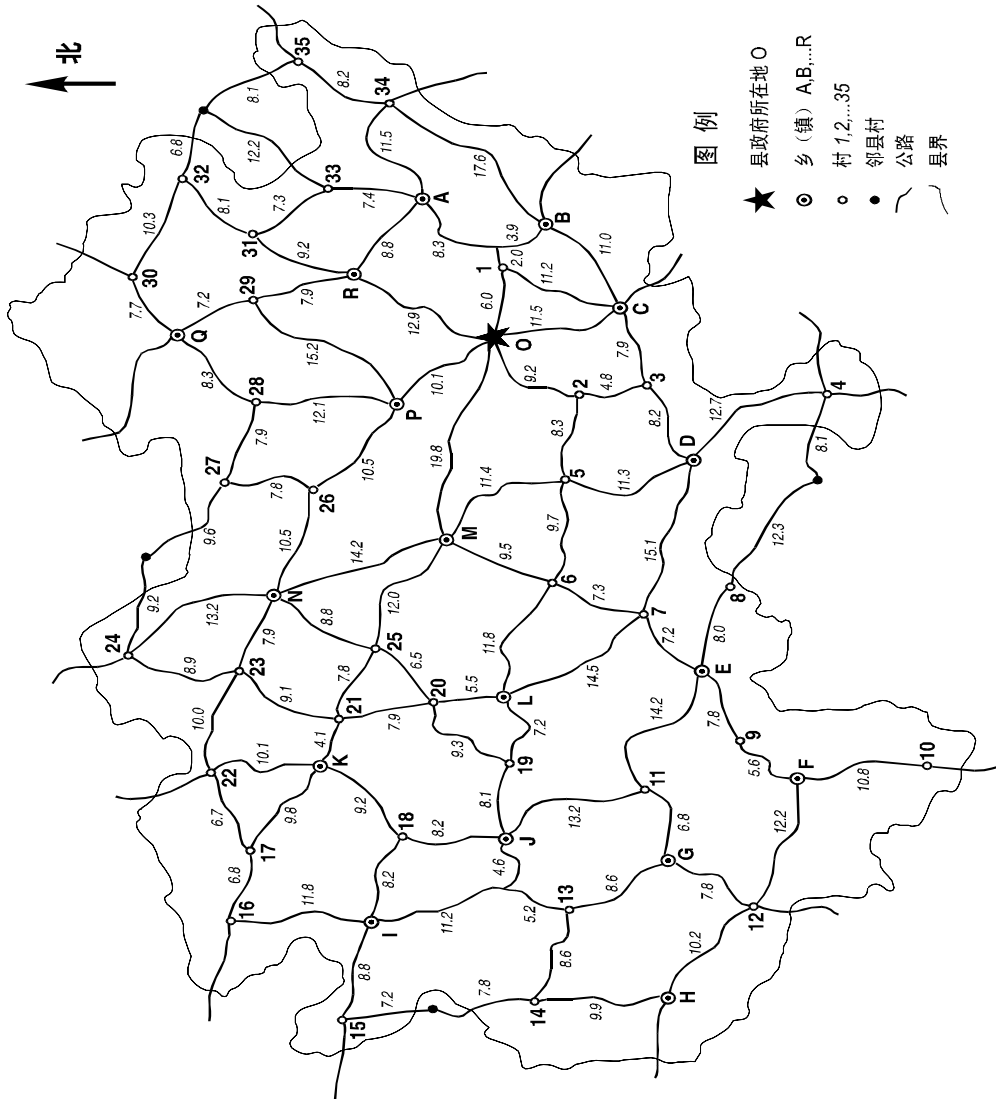
今年夏天该县遭受水灾。为考察灾情、组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡（镇）、村巡视。巡视路线指从县政府所在地出发，走遍各乡（镇）、村，又回到县政府所在地的路线。

1. 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。
2. 假定巡视人员在各乡（镇）停留时间 $T=2$ 小时，在各村停留时间 $t=1$ 小时，汽车行驶速度 $V=35$ 公里/小时。要在 24 小时内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。

- 在上述关于 T, t 和 V 的假定下, 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间是多少; 给出在这种最短时间完成巡视的要求下, 你认为最佳的巡视路线。
- 若巡视组数已定 (比如三组), 要求尽快完成巡视, 讨论 T, t 和 V 改变对最佳巡视路线的影响。

(上海海运学院丁颂康提供)

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》1999年第1期上。



全国大学生数学建模竞赛

1999 年赛题

A 题 自动化车床管理

一道工序用自动化车床连续加工某种零件，由于刀具损坏等原因该工序会出现故障，其中刀具损坏故障占 95%，其它故障仅占 5%。工序出现故障是完全随机的，假定在生产任一零件时出现故障的机会均相同。工作人员通过检查零件来确定工序是否出现故障。

现积累有 100 次刀具故障记录，故障出现时该刀具完成的零件数如附表。现计划在刀具加工一定件数后定期更换新刀具。

已知生产工序的费用参数如下：

故障时产出的零件损失费用 $f=200$ 元/件；

进行检查的费用 $t=10$ 元/次；

发现故障进行调节使恢复正常的平均费用 $d=3000$ 元/次(包括刀具费)；

未发现故障时更换一把新刀具的费用 $k=1000$ 元/次。

1) 假定工序故障时产出的零件均为不合格品，正常时产出的零件均为合格品，试对该工序设计效益最好的检查间隔(生产多少零件检查一次)和刀具更换策略。

2) 如果该工序正常时产出的零件不全是合格品，有 2%为不合格品；而工序故障时产出的零件有 40%为合格品，60%为不合格品。工序正常而误认有故障停机产生的损失费用为 1500 元/次。对该工序设计效益最好的检查间隔和刀具更换策略。

3) 在 2) 的情况，可否改进检查方式获得更高的效益。

附:100 次刀具故障记录(完成的零件数)

459	362	624	542	509	584	433	748	815	505
612	452	434	982	640	742	565	706	593	680
926	653	164	487	734	608	428	1153	593	844
527	552	513	781	474	388	824	538	862	659
775	859	755	649	697	515	628	954	771	609
402	960	885	610	292	837	473	677	358	638
699	634	555	570	84	416	606	1062	484	120
447	654	564	339	280	246	687	539	790	581
621	724	531	512	577	496	468	499	544	645
764	558	378	765	666	763	217	715	310	851

(北京大学孙山泽提供)

B 题 钻井布局

勘探部门在某地区找矿。初步勘探时期已零散地在若干位置上钻井，取得了地质资料。进入系统勘探时期后，要在一个区域内按纵横等距的网格点来布置井位，进行“撒网式”全面钻探。由于钻一口井的费用很高，如果新设计的井位与原有井位重合(或相当接近)，便可利用旧井的地质资料，不必打这口新井。因此，应该尽量利用旧井，少打新井，以节约钻探费用。比如钻一口新井的费用为 500 万元，利用旧井资料的费用为 10 万元，则利用一口旧井就节约费用 490 万元。

设平面上有 n 个点 P_i ，其坐标为 $(a_i, b_i), i=1, 2, \dots, n$ ，表示已有的 n 个井位。新布置的井位是一个正方形网格 N 的所有结点(所谓“正方形网格”是指每个格子都是正方形的网格；结点是指纵线和横线的交叉点)。假定每个格子的边长(井位的纵横间距)都是 1 单位(比如 100 米)。整个网格是可以在平面上任意移动的。若一个已知点 P_i 与某个网格结点 X_j 的距离不超过给定误差 ε ($=0.05$ 单位)，则认为 P_i 处的旧井资料可以利用，不必在结点 X_j 处打新井。

为进行辅助决策，勘探部门要求我们研究如下问题：

1) 假定网格的横向和纵向是固定的(比如东西向和南北向)，并规定两点间的距离为其横向

距离（横坐标之差绝对值）及纵向距离（纵坐标之差绝对值）的最大值。在平面上平行移动网格 N ，使可利用的旧井数尽可能大。试提供数值计算方法，并对下面的数值例子用计算机进行计算。

2) 在欧氏距离的误差意义下，考虑网格的横向和纵向不固定（可以旋转）的情形，给出算法及计算结果。

3) 如果有 n 口旧井，给出判定这些井均可利用的条件和算法（你可以任意选定一种距离）。

数值例子 $n = 12$ 个点的坐标如下表所示：

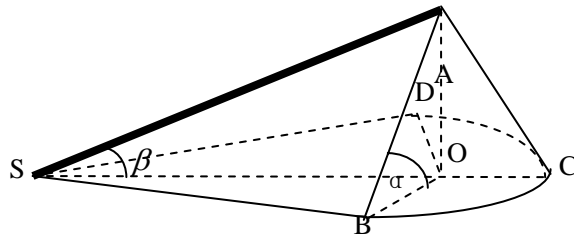
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	0.50	1.41	3.00	3.37	3.40	4.72	4.72	5.43	7.57	8.38	8.98	9.50
b_i	2.00	3.50	1.50	3.51	5.50	2.00	6.24	4.10	2.01	4.50	3.41	0.80

（郑州大学林诒勋提供）

C 题 煤矸石堆积（大专组）

煤矿采煤时，会产生无用废料——煤矸石。在平原地区，煤矿不得不用土地堆放矸石。通常矸石的堆积方法是：

架设一段与地面角度约为 $\beta = 25^\circ$ 的直线形上升轨道（角度过大，运矸车无法装满），用在轨道上行驶的运矸车将矸石运到轨道顶端后向两侧倾倒，待矸石堆高后，再借助矸石堆延长轨道，这样逐渐堆起如下图所示的一座矸石山来。



现给出下列数据：

矸石自然堆放安息角（矸石自然堆积稳定后，其坡面与地面形成的夹角） $\alpha \leq 55^\circ$ ；

矸石容重（碎矸石单位体积的重量）约 2 吨/米³；

运矸车所需电费为 0.50 元/度（不变）；

运矸车机械效率（只考虑堆积坡道上的运输）初始值（在地平面上）约 30%，坡道每延长 10 米，效率在原有基础上约下降 2%；

土地征用费现值为 8 万元/亩，预计地价年涨幅约 10%；

银行存、贷款利率均为 5%；

煤矿设计原煤产量为 300 万吨/年；

煤矿设计寿命为 20 年；

采矿出矸率（矸石占全部采出的百分比）一般为 7%~10%。

另外，为保护耕地，煤矿堆矸土地应比实际占地多征用 10%。

现在煤矿设计中用于处理矸石的经费（只计征地费及堆积时运矸车用的电费）为 100 万元/年，这笔钱是否够用？试制订合理的年度征地计划，并对不同的出矸率预测处理矸石的最低费用。

（太原理工大学贾晓峰提供）

D 题 钻井布局（大专组）

勘探部门在某地区找矿。初步勘探时期已零散地在若干位置上钻井，取得了地质资料。进入系统勘探时期后，要在一个区域内按纵横等距的网格点来布置井位，进行“撒网式”全面钻探。由于钻一口井的费用很高，如果新设计的井位与原有井位重合（或相当接近），便可利用旧井的地质资料，不必打这口新井。因此，应该尽量利用旧井，少打新井，以节约钻探费用。比如钻一

一口新井的费用为 500 万元，利用旧井资料的费用为 10 万元，则利用一口旧井就节约费用 490 万元。

设平面上有 n 个点 P_i ，其坐标为 $(a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，表示已有的 n 个井位。新布置的井位是一个正方形网格 N 的所有结点（所谓“正方形网格”是指每个格子都是正方形的网格；结点是指纵线和横线的交叉点）。假定每个格子的边长（井位的纵横间距）都是 1 单位（比如 100 米）。整个网格是可以在平面上任意移动的。若一个已知点 P_i 与某个网格结点 X_j 的距离不超过给定误差 ε ($\varepsilon = 0.05$ 单位)，则认为 P_i 处的旧井资料可以利用，不必在结点 X_j 处打新井。

为进行辅助决策，勘探部门要求我们研究如下问题：

1) 假定网格的横向和纵向是固定的（比如东西向和南北向），并假定距离误差是沿横向和纵向计算的，即要求可利用点 P_i 与相应结点 X_j 的横坐标之差（取绝对值）及纵坐标之差（取绝对值）均不超过 ε 。在平面上平行移动网格 N ，使可利用的旧井数尽可能大。试提供数值计算方法，并对下面的数值例子用计算机进行计算。

2) 在问题 1) 的基础上，考虑网格的横向和纵向不固定（可以旋转）的情形，给出算法及计算结果。

数值例子 $n = 12$ 个点的坐标如下表所示

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	0.50	1.41	3.00	3.37	3.40	4.72	4.72	5.43	7.57	8.38	8.98	9.50
b_i	2.00	3.50	1.50	3.51	5.50	2.00	6.24	4.10	2.01	4.50	3.41	0.80

（郑州大学林诒勋提供）

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》2000 年第 1 期上。

全国大学生数学建模竞赛

2000 年赛题

A 题 DNA 序列分类

2000 年 6 月, 人类基因组计划中 DNA 全序列草图完成, 预计 2001 年可以完成精确的全序列图, 此后人类将拥有一本记录着自身生老病死及遗传进化的全部信息的“天书”。这本大自然写成的“天书”是由 4 个字符 A, T, C, G 按一定顺序排成的长约 30 亿的序列, 其中没有“断句”也没有标点符号, 除了这 4 个字符表示 4 种碱基以外, 人们对它包含的“内容”知之甚少, 难以读懂。破译这部世界上最巨量信息的“天书”是二十一世纪最重要的任务之一。在这个目标中, 研究 DNA 全序列具有什么结构, 由这 4 个字符排成的看似随机的序列中隐藏着什么规律, 又是解读这部天书的基础, 是生物信息学 (Bioinformatics) 最重要的课题之一。

虽然人类对这部“天书”知之甚少, 但也发现了 DNA 序列中的一些规律性和结构。例如, 在全序列中有一些是用于编码蛋白质的序列片段, 即由这 4 个字符组成的 64 种不同的 3 字符串, 其中大多数用于编码构成蛋白质的 20 种氨基酸。又例如, 在不用于编码蛋白质的序列片段中, A 和 T 的含量特别多些, 于是以某些碱基特别丰富作为特征去研究 DNA 序列的结构也取得了一些结果。此外, 利用统计的方法还发现序列的某些片段之间具有相关性, 等等。这些发现让人们相信, DNA 序列中存在着局部的和全局性的结构, 充分发掘序列的结构对理解 DNA 全序列是十分有意义的。目前在这项研究中最普通的思想是省略序列的某些细节, 突出特征, 然后将其表示成适当的数学对象。这种被称为粗粒化和模型化的方法往往有助于研究规律性和结构。

作为研究 DNA 序列的结构, 提出以下对序列集合进行分类的问题:

1) 下面有 20 个已知类别的人工制造的序列, 其中序列标号 1—10 为 A 类, 11—20 为 B 类。请从中提取特征, 构造分类方法, 并用这些已知类别的序列, 衡量你的方法是否足够好。然后用你认为满意的方法, 对另外 20 个未标明类别的人工序列 (标号 21—40) 进行分类, 把结果用序号 (按从小到大的顺序) 标明它们的类别 (无法分类的不写入):

A 类 _____ ; B 类 _____。

请详细描述你的方法, 给出计算程序。如果你部分地使用了现成的分类方法, 也要将方法名称准确注明。

这 40 个序列放在如下地址的网页上, 用数据文件 Art-model-data 标识, 供下载:

网易网址: www.163.com 教育频道 在线试题;

教育网: www.cbi.pku.edu.cn News mcm2000

教育网: www.csiam.edu.cn/mcm

[注] 目前这些网站上不一定还保存有该文件, 这里将该文件的内容附于本题后。

2) 在同样网址的数据文件 Nat-model-data 中给出了 182 个自然 DNA 序列, 它们都较长。用你的分类方法对它们进行分类, 像 1) 一样地给出分类结果。

提示: 衡量分类方法优劣的标准是分类的正确率, 构造分类方法有许多途径, 例如提取序列的某些特征, 给出它们的数学表示: 几何空间或向量空间的元素等, 然后再选择或构造适合这种数学表示的分类方法; 又例如构造概率统计模型, 然后用统计方法分类等。

(北京工业大学孟大志提供)

[附] 数据文件 Art-model-data 的内容如下:

附录 1: 已知类别的序列 (用于提取特征及检验方法)

A 类 10 个序列:

```
>aggcacggaaaaacgggaataacggaggaggacttggcacggcattacacggaggacaggtaaaggaggcttgtctac
ggccggaagtgaaggggatatgaccgcttgaattgtctg
>cggaggacaaacgggatggcggtattggaggtggcggactgttcgggaattattcggtttaaacgggacaaggaaggc
ggctggaacaaccggacggtggcagcaaaaggaacggacacg
>gggacggatacggattctggccacggacggaaggaggacacggcggacatacggcggcaacggacggaacggaggga
aggaggcggcaatcggtacggagcggcggacggacggag
>atggataacggaaacaaccagacaaactcggtagaatacagaagcttagatgcatatgttttaataaaattttt
tattattatggtatcataaaaaaaggttgcgagataacata
>cggctggcgggacaacggactggcggattcgaacggaggagcggacggaggctaccaccgtttcggcggaaagg
cggaggctggcaggaggctcattacggggagcggaggcgg
```


>atggaaaattttcgaaaaggcggcaggcaggaggcaaaaggcggaaaaggaaacggcggatatttcggaagtggata
ttaggaggcgggaataaaaggacggcggcacaaaaggaggcg
>atgggattattgaaatggcggagggaagatccgggaataaaatggcggaaagaactgttttcggaatggaaaaaggac
taggaatcggcggcagggaagataggaggcggaaaggacgg
>atggccatcggcgttaggctggaaggaacaataggcggaaftaaggaggcgttctcgttttcgacaaggaggcggga
ccataggaggcggattaggaacggttatgaggaggactcgg
>atggcggaaaaaggaaatgtttggcatcggcgggctccggcaactggagggtcggccatggaggcggaaaatcgtgggcg
gaggcagcgtggccggagttgaggagcggcacaatgt
>tggccggaggggcccgtcgggagcggatttctacaagggtcctgtaaggagggtggcatccaggcgtcgcacgct
cggcggcaggaggcagcgggaaaaaacggggaggcgggt

B 类 10 个序列:

>gttagatttaacgtttttatggaattatggaattataaaatataaaatattatatttttagtaagtaaatccaacgt
ttttattacttttaaaatfaaatatttttaaaatccag
>gtttaattactttatcatttaatttagtttaatttaaaatfaaattagtaagatgaatttggttttttaaggt
agttatftaattatcgttaaggaaagtfaaatctaagatt
>gtattacaggcagacctatttaggtattattattttggatttttttttttttttaagtaaccgaattat
ttctttaagacgttacttaatgtcaatcgtttatgcagg
>gttagtcttttttagattaaattatgattatgcagttttttacataagaaaattttttcggagttcatattct
aatctgtcttttaaaatcttagagatattatccgttaatt
>gtattatattttttattttatttttagaatataattgaggatgtgttaaaaaaaattttttttttttt
tttttttttttaaaattataaaatfaaatftaaact
>gttatttttaaaatfaatttttaaaatacaaaaattttactttctaaaatggctctcggatcgataatgtaa
cttattgaatctatagaattacattattgatttttccaga
>gtatgtctatttcacggaagaatgcaccactatattgaaattatctatggctaaaaaccctcagtaaaatcaatc
cctaaacccttaaaaaacggcggcctatcccgtcagtcgag
>gttaattatttattcctacggcaattaattattattacggtttttttacaatttttttttgtcctatagaga
aattacttacaacggtattttacatactattttttgtc
>gttacattatttattatccgttatcgataatttttacctctttttcgtgagtttttattcttctttttct
tctttataggatctcatttaatatcttaattttcttag
>gtatttaactctcttacttttttctactctctacatttctctctaaaactgttgatttaactttgtttct
ttaaggatttttttactatcctctgttatgtttatttag

附录 2: 测试集 (人工制造)

- 1:
tttagctcagtcagctagctagttacaatttcgacaccagtttcgaccatctaaatttcgatccgtaccgtaatttagcttagatttgattaaaggatt
agattgacc
- 2:
tttagtacagtagctcagccaagaacgatgtttaccgtaacdgtqacgtaccgtacgctaccgtaccggattccggaaagccgattaaggaccgatc
gaaagggga
- 3:
cgggaggatttagccgacggggaccgggattcgggaccgaggaaattcccggattaagggttagctcccgggattaggcccgatggctg
ggaccgc
- 4:
tttagctagctactttagctatttttagtagctagccagccttaaggctagcttttagctagcattgttcttattgggaccaagttcgactttacgatttagt
ttgaccgta
- 5:
gaccaaaggtgggctttaggaccgatgcttttagtcgagctggaccaggtccccagggtattaggcaaaagctacgggcaattgcaatttagct
taggccag
- 6:
gatttacttagcatttttagctgacgtagcaagcattagcttttagccaatttcgcaattgcccagtttcgagctcagtttaacgaggatcttttagctcaa
gctttttacg
- 7:
ggattcggatttaccggggattggcggaacgggaccttttaggtcgggaccattaggagtaaatgccaaggacgctggttagccagtcgg5tta
aggcttagg
- 8:
tccttagatttcagttactatattgacttacagctttgagattcccctacgattttgacttaaaattagacgttagggcttatcagttatggattaatttagct

atttcgaga
 9:
 ggccaattccggtaggaaggtgatggcccgggggttcccgggaggatttaggctgacggccggccatttcggttagggaggccgggacgcgt
 tagggacg
 10:
 cgctaagcagctcaagctcagtcagtcacgtttccaagtcagtaattgccaagttaaccgttagctgacgctgaacgctaacagtattagctgatg
 actcgtacg
 11:
 ttaaggacttaggcttagcagttactttagtttagttccaagctacgtttacgggaccagatgctagctagcaatttattatccgtattagcttagg
 ttttagcggg
 12:
 tgctaccgggcagctcttaacgtagctaccgttttagttgggccacgcttgcgggtttcggattaaattcgttgcagtcgctcrtgggttagtcattcc
 caaaaggt
 13:
 cagttagctgaatcgttttagccatttgacgtaaacatgattttacgtacgtaattttagccctgacgttttagctaggaatttatgctgacgtagcgcac
 ttttagcacc
 14:
 cggttaggcacaaggttgatttcgaccaggggaaagccgggacccgaaccagggctttagcgttagctgacgctaggttaggttgaac
 ccggaaag
 15:
 gcggaaggcgtaggttthgggatgcttagccgtaggctagctttcgacacgacgattcgcaccacaggataaaagtaagggaccggtaagtcg
 cggtagccg
 16:
 ctagctcgaacgcttttagcgccccgggagtagctgtaccgttagtatagcagtcgacgcaattcgaaaagtcgccagctttagccccaga
 gtcgacgct
 17:
 gggatgctgacgctggtagcttttagcgttagcgttagggccccagctgcaggaaatgccaaaggaggccaccgggtagatgccasagt
 gcaccgta
 18:
 aacttttagggcatttccagttttacgggttattttccagttaaacttgcaccattttacgtgttacgatttacgtataattgacctattttggacctttagt
 tgggttacc
 19:
 ttaggccaagtccdcgaggcaahggaattctgatccaagtccaatcacgtacagtcgaagtcaccgtttgcagctaccgtttaccgtacgttgaagt
 caaatccat
 20:
 ccattagggttattacctgtttattttcccgagaccttaggttaccgtacttttaacgggtttacctttgaaattttggactagcttaccctggatttaacg
 gccagttgt

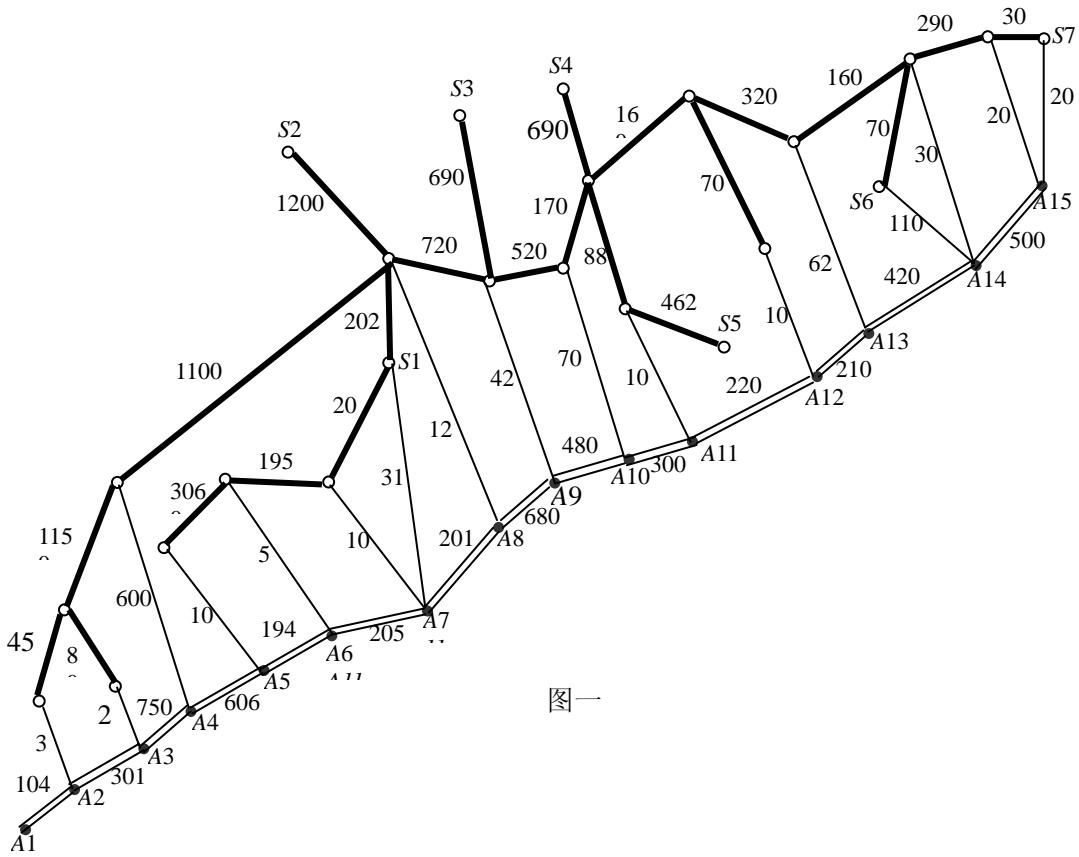
B 题 钢管订购和运输

要铺设一条 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{15}$ 的输送天然气的主管道，如图一所示。经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有 S_1, S_2, \dots, S_7 。图中粗线表示铁路，单细线表示公路，双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路，或者建有施工公路)，圆圈表示火车站，每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位 km)。

为方便计，1km 主管道钢管称为 1 单位钢管。

一个钢厂如果承担制造这种钢管，至少需要生产 500 个单位。钢厂 S_i 在指定期限内能生产该钢管的最大数量为 s_i 个单位，钢管出厂销价 1 单位钢管为 p_i 万元，如下表：

i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
p_i	160	155	155	160	155	150	160



图一

1 单位钢管的铁路运价如下表:

里程 (km)	≤300	301~350	351~400	401~450	451~500
运价 (万元)	20	23	26	29	32

里程 (km)	501~600	601~700	701~800	801~900	901~1000
运价 (万元)	37	44	50	55	60

1000km 以上每增加 1 至 100km 运价增加 5 万元。

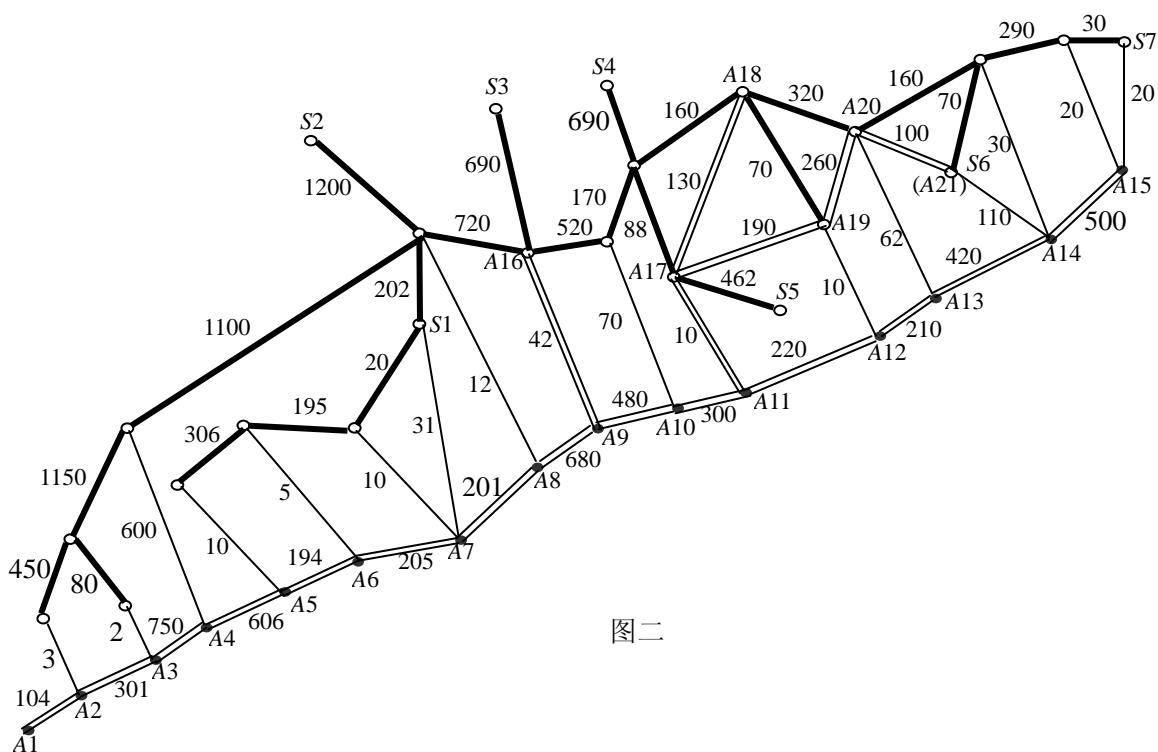
公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元 (不足整公里部分按整公里计算)。

钢管可由铁路、公路运往铺设地点 (不只是运到点 A_1, A_2, \dots, A_{15} , 而是管道全线)。

(1) 请制定一个主管道钢管的订购和运输计划, 使总费用最小 (给出总费用)。

(2) 请就 (1) 的模型分析: 哪个钢厂钢管的销价的变化对购运计划和总费用影响最大, 哪个钢厂钢管的产量的上限的变化对购运计划和总费用的影响最大, 并给出相应的数字结果。

(3) 如果要铺设的管道不是一条线, 而是一个树形图, 铁路、公路和管道构成网络, 请就这种更一般的情形给出一种解决办法, 并对图二按 (1) 的要求给出模型和结果。



图二

(武汉大学费浦生提供)

C 题 飞越北极(大专组)

今年 6 月, 扬子晚报发布消息: “中美航线下月可飞越北极, 北京至底特律可节省 4 小时”, 摘要如下:

7 月 1 日起, 加拿大和俄罗斯将允许民航班机飞越北极, 此改变可大幅度缩短北美与亚洲间的飞行时间, 旅客可直接从休斯敦, 丹佛及明尼阿波利斯直飞北京等地。据加拿大空中交通管制局估计, 如飞越北极, 底特律至北京的飞行时间可节省 4 个小时。由于不需中途降落加油, 实际节省的时间不止此数。

假设: 飞机飞行高度约为 10 公里, 飞行速度约为每小时 980 公里; 从北京至底特律原来的航线飞经以下 10 处:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| A1 (北纬 31 度, 东经 122 度); | A2 (北纬 36 度, 东经 140 度); |
| A3 (北纬 53 度, 西经 165 度); | A4 (北纬 62 度, 西经 150 度); |
| A5 (北纬 59 度, 西经 140 度); | A6 (北纬 55 度, 西经 135 度); |
| A7 (北纬 50 度, 西经 130 度); | A8 (北纬 47 度, 西经 125 度); |
| A9 (北纬 47 度, 西经 122 度); | A10 (北纬 42 度, 西经 87 度)。 |

请对 “北京至底特律的飞行时间可节省 4 小时” 从数学上作出一个合理的解释, 分两种情况讨论:

- (1) 设地球是半径为 6371 千米的球体;
- (2) 设地球是一旋转椭球体, 赤道半径为 6378 千米, 子午线短半轴为 6357 千米。

(复旦大学谭永基提供)

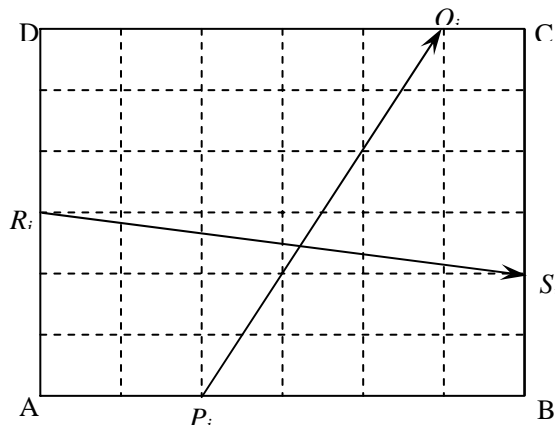
D 题 空洞探测 (大专组)

山体、隧洞、坝体等的某些内部结构可用弹性波测量来确定。一个简化问题可描述为，一块均匀介质构成的矩形平板内有一些充满空气的空洞，在平板的两个邻边分别等距地设置若干波源，在它们的对边对等地安放同样多的接收器，记录弹性波由每个波源到达对边上每个接收器的时间，根据弹性波在介质中和在空气中不同的传播速度，来确定板内空洞的位置。现考察如下的具体问题：

一块 240 (米) × 240 (米) 的平板 (如图)，在 AB 边等距地设置 7 个波源 $P_i (i=1, \dots, 7)$ ，CD 边对等地安放 7 个接收器 $Q_j (j=1, \dots, 7)$ ，记录由 P_i 发出的弹性波到达 Q_j 的时间 t_{ij} (秒)；在 AD 边等距地设置 7 个波源 $R_i (i=1, \dots, 7)$ ，BC 边对等地安放 7 个接收器 $S_j (j=1, \dots, 7)$ ，记录由 R_i 发出的弹性波到达 S_j 的时间 τ_{ij} (秒)。已知弹性波在介质和空气中的传播速度分别为 2880 (米/秒) 和 320 (米/秒)，且弹性波沿板边缘的传播速度与在介质中的传播速度相同。

1) 确定该平板内空洞的位置。

2) 只根据由 P_i 发出的弹性波到达 Q_j 的时间 $t_{ij} (i, j=1, \dots, 7)$ ，能确定空洞的位置吗？讨论在同样能够确定空洞位置的前提下，减少波源和接受器的方法。



t_{ij}	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
P_1	0.0611	0.0895	0.1996	0.2032	0.4181	0.4923	0.5646
P_2	0.0989	0.0592	0.4413	0.4318	0.4770	0.5242	0.3805
P_3	0.3052	0.4131	0.0598	0.4153	0.4156	0.3563	0.1919
P_4	0.3221	0.4453	0.4040	0.0738	0.1789	0.0740	0.2122
P_5	0.3490	0.4529	0.2263	0.1917	0.0839	0.1768	0.1810
P_6	0.3807	0.3177	0.2364	0.3064	0.2217	0.0939	0.1031
P_7	0.4311	0.3397	0.3566	0.1954	0.0760	0.0688	0.1042

τ_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
R_1	0.0645	0.0602	0.0813	0.3516	0.3867	0.4314	0.5721
R_2	0.0753	0.0700	0.2852	0.4341	0.3491	0.4800	0.4980
R_3	0.3456	0.3205	0.0974	0.4093	0.4240	0.4540	0.3112
R_4	0.3655	0.3289	0.4247	0.1007	0.3249	0.2134	0.1017
R_5	0.3165	0.2409	0.3214	0.3256	0.0904	0.1874	0.2130
R_6	0.2749	0.3891	0.5895	0.3016	0.2058	0.0841	0.0706
R_7	0.4434	0.4919	0.3904	0.0786	0.0709	0.0914	0.0583

(东北电力学院关信提供)

注 优秀论文及评阅人文章刊登在《数学的实践与认识》2001 年第 1 期上。